Die Bewegungsgleichungen nichtholonomer Systeme

Schaefer, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 3, 1951,
S. 116-121

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Bewegungsgleichungen nichtholonomer Systeme

Von **H. Schaefer**

Abstract: The equations of motion of non-holonomic-systems in velocity coordinates are derived in two different ways. (1) Directly by the Lagrangeian principle, (2) by the principle of least action in the canonical form.

I. Einleitung

Die Theorie der nichtholonomen Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden hat durch die Arbeiten von Leif Johnsen[1]) einen gewissen Abschluß bekommen. Ihm gelang es, den Bewegungsgleichungen für den allgemeinsten Fall nichtholonomer Bedingungen eine elegante und einprägsame Form zu geben. Die Arbeiten Johnsens scheinen jedoch wenig bekannt geworden zu sein. Georg Hamel, dem wir eine große Reihe wertvoller Arbeiten über nichtholonome Systeme verdanken, hat nun in seinem unlängst erschienenen Buche „Theoretische Mechanik"[2]) eine zusammenfassende Darstellung über dieses Sonderkapitel der Mechanik gegeben und dabei auch die Johnsenschen Ergebnisse mitgeteilt.

Beide Verfasser benutzen die Lagrangesche Zentralgleichung zur Herleitung der Bewegungsgleichungen. Die Zentralgleichung gewinnt man bekanntlich aus dem Lagrangeschen Prinzip, wobei man zu den virtuellen Verrückungen der Koordinaten noch zusätzlich Variationen der Geschwindigkeiten einführen muß. Bei holonomen Systemen bekommt man hierdurch unmittelbar den Zugang zu den Variationsproblemen der Mechanik, bei nichtholonomen Systemen jedoch wird man zu subtilen Auseinandersetzungen über den Zusammenhang der jetzt durch Nebenbedingungen beengten virtuellen Verrückungen und Variationen der Geschwindigkeiten gezwungen. So ist selbst Johnsen, wie Hamel bemerkt hat, bei der Herleitung seiner Bewegungsgleichungen gerade an dieser Stelle ein Fehler unterlaufen.

Es ist von vornherein klar, daß man die Zentralgleichung vermeiden kann. Eine solche Herleitung, die unmittelbar vom Lagrangeschen Prinzip ausgeht, sei im nächsten Abschnitt mitgeteilt. Da das Ziel nur die Bewegungsgleichungen sind, wird der charakteristische Unterschied in der Kinematik holonomer und nichtholonomer Systeme nur kurz gestreift.

Variationsprobleme bieten oft einen bequemen Weg, Bewegungsgleichungen zu gewinnen. Bei nichtholonomen Systemen bleibt dies bekanntlich ein unerfüllbarer Wunsch. Im letzten Abschnitt soll aber gezeigt werden, wie man aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung in seiner elastischsten Form, der kanonischen, die Bewegungsgleichungen gewinnen kann durch einen Kalkül, der sich von dem der Variationsrechnung nur wenig unterscheidet.

II. Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Lagrangeschen Prinzip

Man nennt ein mechanisches System von n Freiheitsgraden nichtholonom, wenn zwischen den Lagrangeschen Koordinaten q_ϱ ($\varrho = 1, 2 \ldots, n$) nicht-integrable Bedingungsgleichungen

$$f_\lambda(\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n, q_1 \ldots q_n, t) = 0\,, \tag{1}$$

im ganzen etwa $k(\lambda = 1 \ldots k, k < n)$, vorgeschrieben sind. Durch Einführung der $n - k$ voneinander unabhängigen Geschwindigkeitsparameter ω_σ sollen diese Bedingungsgleichungen identisch erfüllt sein:

$$\dot{q}_\varrho = F_\varrho(\omega_1 \ldots \omega_{n-k}, q_1 \ldots q_n, t)\,. \tag{2}$$

Es gelten dann die $n - k$ Identitäten

$$\sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \dot{q}_\varrho} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \omega_\sigma} = 0\,. \tag{3}$$

Nach dem Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges haben die virtuellen Verrückungen δq_ϱ den k Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \dot{q}_\varrho} \delta q_\varrho = 0 \tag{4}$$

zu genügen, die durch Einführung der $n - k$ voneinander unabhängigen infinitesimalen Verrückungsparameter $\delta\vartheta_\sigma$ identisch erfüllt werden, wenn man

$$\delta q_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \omega_\sigma} \delta\vartheta_\sigma \tag{5}$$

setzt und (3) beachtet.

Der zu einem Systempunkt weisende Ortsvektor sei $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}/dt$ die Geschwindigkeit, $\mathfrak{w} = d\mathfrak{v}/dt$ die Beschleunigung und $\delta\mathfrak{r}$ die virtuelle Verrückung.

Es gilt dann

$$\mathfrak{v} = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_\varrho} \dot{q}_\varrho + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\,; \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot{q}_\varrho} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_\varrho} \tag{6}$$

und

$$\delta\mathfrak{r} = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_\varrho} \delta q_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot{q}_\varrho} \delta q_\varrho\,. \tag{7}$$

Im folgenden wollen wir nun alle von den $\dot{q}_\varrho$ abhängigen Größen, in denen nach (2) die $\dot{q}_\varrho$ durch die ω_σ ersetzt worden sind, mit einem * versehen. Ferner machen wir von der symbolischen Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_\varrho} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \omega_\sigma} \tag{8}$$

Gebrauch. Nach (5), (6) und (7) sind dann

$$\mathfrak{v}^* = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_\varrho} F_\varrho + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\delta\mathfrak{r}^* = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \vartheta_\sigma} \delta\vartheta_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial \mathfrak{v}^*}{\partial \omega_\sigma} \delta\vartheta_\sigma\,. \tag{10}$$

Nach diesen Vorbereitungen schreiben wir das Lagrangesche Prinzip an:

$$\int dm\mathfrak{w}^* \cdot \delta\mathfrak{r}^* = \int d\mathfrak{K} \cdot \delta\mathfrak{r}^* \tag{11}$$

und denken uns $\delta\mathfrak{r}^*$ nach (10) eingeführt. Wegen der freien Verfügungsmöglichkeit über die $\delta\vartheta_\sigma$ entstehen die $n-k$ Gleichungen

$$\int dm\mathfrak{w}^* \cdot \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\omega_\sigma} = K_\sigma, \qquad \left(K_\sigma = \int d\mathfrak{K} \cdot \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\vartheta_\sigma}\right), \tag{12}$$

deren linke Seiten noch umzuformen sind.

Wir benutzen die unmittelbar zu überblickende Identität

$$\begin{aligned}\int dm\mathfrak{w}^* \cdot \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\omega_\sigma} &= \\ = \frac{d}{dt}\int dm\mathfrak{v}^* \cdot \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\omega_\sigma} - \int dm\mathfrak{v}^* \cdot \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\vartheta_\sigma} &- \int dm\mathfrak{v}^* \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\omega_\sigma}\right) - \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\vartheta_\sigma}\right].\end{aligned} \tag{13}$$

Nun ist aber die in den ω_σ ausgedrückte kinetische Energie

$$T^* = \frac{1}{2}\int dm\mathfrak{v}^{*2}, \tag{14}$$

so daß wir, mit Einführung der Abkürzung

$$\Gamma_\sigma = \int dm\mathfrak{v}^* \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\omega_\sigma}\right) - \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\vartheta_\sigma}\right], \tag{15}$$

die Bewegungsgleichungen (12) in der neuen Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\omega_\sigma}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial\vartheta_\sigma} - \Gamma_\sigma = K_\sigma \tag{16}$$

schreiben können. Es bleibt noch die Aufgabe, Γ_σ durch skalare Größen auszudrücken. Die Glieder der eckigen Klammer in (15) bedeuten aber

$$\frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\omega_\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\dot{q}_\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial\omega_\sigma}; \qquad \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\vartheta_\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial q_\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial\omega_\sigma}, \tag{17}$$

und es ist

$$\frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial q_\varrho} + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\dot{q}_\mu}\frac{\partial F_\mu}{\partial q_\varrho}. \tag{18}$$

Somit wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\omega_\sigma}\right) - \frac{\partial\mathfrak{v}^*}{\partial\vartheta_\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\dot{q}_\varrho}\right) - \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial q_\varrho}\right]\frac{\partial F_\varrho}{\partial\omega_\sigma} + \sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\dot{q}_\varrho}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial\omega_\sigma}\right) - \frac{\partial F_\varrho}{\partial\vartheta_\sigma}\right]. \tag{19}$$

Zu beachten ist, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung die $\dot{q}_\varrho$ nach der Differentiation durch die ω_σ zu ersetzen sind. Nun verschwinden aber die eckigen Klammern der ersten Summe rechts, was sofort an Gleichung (6) nachzuprüfen ist (und was auch schon von der Herleitung der gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen bekannt ist), so daß die Γ_σ die Gestalt annehmen:

$$\Gamma_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{n}\int dm\mathfrak{v}^* \cdot \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\dot{q}_\varrho}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial\omega_\sigma}\right) - \frac{\partial F_\varrho}{\partial\vartheta_\sigma}\right],$$

oder

$$\Gamma_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{n}p_\varrho^*\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial\omega_\sigma}\right) - \frac{\partial F_\varrho}{\partial\vartheta_\sigma}\right], \tag{20}$$

denn $\int dm\mathfrak{v}^* \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \dot{q}_\varrho} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} = p_\varrho$, worin erst nach der Differentiation nach $\dot{q}_\varrho$ die $\dot{q}_\varrho$ durch die ω_σ zu ersetzen sind. Die p_ϱ sind die Lagrangeschen Impulse, ausgedrückt in den ω_σ, also

$$p_\varrho = p_\varrho^*(\omega_1 \ldots \omega_{n-k}, q_1 \ldots q_n, t) . \tag{21}$$

Führt man (20) in (16) ein, so hat man die Gestalt der Bewegungsgleichungen, wie sie ihnen Leif Johnsen gegeben hat.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Gleichungen (19), die rein kinematischer Natur sind, aufs engste mit den Hamelschen „Übergangsgleichungen" und dem Begriff der „nichtholonomen Deviation" zusammenhängen. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, daß das Integral $\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{v}\,dt$ bei holonomen Systemen unabhängig vom Wege ist, wogegen $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{v}^* dt$ bei nichtholonomen Systemen von Null verschieden bleibt, wenn man mit der Operation δ den Übergang von einer kinematisch möglichen Bahnkurve zu einer infinitesimal benachbarten Kurve verbindet, die zwar den virtuellen Verrückungen δq_ϱ erreichbar ist, aber nicht mehr kinematisch möglich sein kann.

III. Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

Einen anderen, bequemen Ausgangspunkt für die Gewinnung der Bewegungsgleichungen in Geschwindigkeitsparametern bietet das Prinzip der kleinsten Wirkung in der kanonischen Form:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho \frac{dq_\varrho}{dt} - H(p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n, t) \right\} dt = 0 . \tag{1}$$

Wir haben hier ein Variationsproblem vor uns, in dem die p_ϱ und q_ϱ unabhängig voneinander variiert werden. An den Intervallenden t_1 und t_2 sind die δq_ϱ Null zu setzen. H ist die Hamiltonsche Funktion, die sich in der bekannten Weise aus kinetischer und potentieller Energie berechnet. Die Eulerschen Gleichungen dieses Variationsproblems sind die $2n$ kanonischen Bewegungsgleichungen. Nun können die p_ϱ, weil sie sich linear durch die $\dot{q}_\varrho$ ausdrücken, als Geschwindigkeitsparameter aufgefaßt werden. Will man andere Geschwindigkeitsparameter ω_ϱ einführen, so hat man die p_ϱ als Funktionen dieser ω_ϱ darzustellen, also $p_\varrho = p_\varrho(\omega_1 \ldots \omega_n, q_1 \ldots q_n, t)$. Dann sind in (1) die ω_ϱ und q_ϱ unabhängig voneinander zu variieren. Auf diese Weise kann man z.B. die drei Eulerschen Kreiselgleichungen aus einem echten Variationsproblem gewinnen; die drei übrigen Gleichungen, die hierbei durch Variation der ω_ϱ entstehen, geben den Zusammenhang der $\dot{q}_\varrho$ mit den ω_ϱ.

Im nichtholonomen Fall müssen die Variationen δq_ϱ virtuelle Verrükkungen sein, und (1) verliert damit die Eigenschaft eines echten Variationsproblems. Bei k nichtholonomen Bedingungen (I, 1) sind Impuls und Energie wieder in Abhängigkeit von den $n-k$ Parametern ω_σ darzustellen:

$$\begin{aligned} p_\varrho &= p_\varrho^*(\omega_1 \ldots \omega_{n-k}, q_1 \ldots q_n, t) \\ H &= H^*(\omega_1 \ldots \omega_{n-k}, q_1 \ldots q_n, t) \end{aligned}$$

und die virtuellen Verrückungen δq_ϱ durch die $n-k$ Parameter $\delta\vartheta_\sigma$, von denen die Variationen $\delta\omega_\sigma$ unabhängig sind. Das Prinzip der kleinsten Wirkung (1) gibt dann $2(n-k)$ Gleichungen

$$\sum_{\varrho=1}^{n}\left(\frac{dp_\varrho^*}{dt}-\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial p_\lambda^*}{\partial q_\varrho}\dot q_\lambda+\frac{\partial H^*}{\partial q_\varrho}\right)\frac{\partial F_\varrho}{\partial\omega_\sigma}=0\,, \tag{2a}$$

$$\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial p_\varrho^*}{\partial\omega_\sigma}\dot q_\varrho-\frac{\partial H^*}{\partial\omega_\sigma}=0;\qquad \sigma=1,\ldots,n-k\,. \tag{2b}$$

Nimmt man zur Gleichungsgruppe (2b) die k Bedingungsgleichungen (I, 1) hinzu, so liefern diese n Gleichungen den Zusammenhang der $\dot q_\varrho$ mit den ω_σ; also

$$\dot q_\varrho=F_\varrho(\omega_1\cdots\omega_{n-k},q_1\cdots q_n,t)\,. \tag{3}$$

Es würde keine Mühe machen, der Gleichungsgruppe (2a) die Gestalt der Johnsenschen Gleichungen zu geben. Die Weiterentwicklung der Bewegungsgleichungen (2a) im skleronomen Fall bei linearen nichtholonomen Nebenbedingungen führt rasch zu einer sehr übersichtlichen Darstellung.

Jetzt ist

$$H=T+\Phi;\qquad 2T=\sum_{\lambda,\varrho=1}^{n}g_{\lambda\varrho}\dot q_\lambda\dot q_\varrho\,;\qquad p_\lambda=\sum_{\varrho=1}^{n}g_{\lambda\varrho}\dot q_\varrho\,.$$

Als Folge der Nebenbedingungen gelte für $\dot q_\varrho$

$$\dot q_\varrho=F_\varrho=\sum_{\tau=1}^{n-k}b_{\varrho\tau}\omega_\tau\,. \tag{4}$$

Dann werden

$$p_\varrho^*=\sum_{\tau=1}^{n-k}a_{\varrho\tau}\omega_\tau \tag{5}$$

mit

$$a_{\varrho\tau}=\sum_{\lambda=1}^{n}g_{\varrho\lambda}b_{\lambda\tau}$$

und

$$2T^*=\sum_{\mu,\tau=1}^{n-k}\alpha_{\mu\tau}\omega_\mu\omega_\tau \tag{6}$$

mit

$$\alpha_{\mu\tau}=\alpha_{\tau\mu}=\sum_{\lambda,\varrho=1}^{n}g_{\lambda\varrho}b_{\lambda\mu}b_{\varrho\tau}\,.$$

Ferner wird

$$H^*=T^*+\Phi\,. \tag{7}$$

(4) bis (7) sind jetzt in (2a) einzuführen. Wir unterdrücken die einfache Zwischenrechnung und stellen das Ergebnis gleich hin:

$$\sum_{\mu=1}^{n-k}\alpha_{\tau\mu}\dot\omega_\mu+\sum_{\mu,\sigma=1}^{n-k}\beta_{\mu\tau}^{\sigma}\omega_\sigma\omega_\mu+\frac{\partial H^*}{\partial\vartheta_\tau}=0 \tag{8}$$

$$(\tau=1,\ldots,n-k)$$

mit

$$\beta^{\sigma}_{\mu\tau} = \sum_{\lambda,\varrho=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial q_{\lambda}} - \frac{\partial a_{\lambda\sigma}}{\partial q_{\varrho}} \right) b_{\lambda\mu}\, b_{\varrho\tau}\,. \tag{9}$$

Wegen der schiefen Symmetrie $\beta^{\sigma}_{\mu\tau} = -\beta^{\sigma}_{\tau\mu}$ hat das zweite Glied in (8) gyroskopischen Charakter. Bezeichnen wir es zur Abkürzung mit Γ^*_{τ}, so ist $\sum_{\tau=1}^{n-k} \Gamma^*_{\tau}\omega_{\tau} = 0$, d.h. die Gesamtleistung der Kräfte Γ^*_{τ} während der Bewegung ist Null.

Zusammenfassung

Die Bewegungsgleichungen nichtholonomer Systeme in Geschwindigkeitskoordinaten werden auf zwei verschiedene Weisen hergeleitet, einmal unmittelbar aus dem Lagrangeschen Prinzip, zum anderen Mal aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der kanonischen Form.

Literatur

[1]) Johnsen, Leif: Dynamique générale des systèmes non holonomes. Schr. Norweg. Ges. Wiss. Oslo, Math.-Naturw. Klasse, 1941. Nr. 4.
[2]) Hamel, Georg: Theoretische Mechanik, Berlin, Göttingen, Heidelberg. 1949.